pp. 13-40 in Claudio Bartocci & Piergiorguio Odifreddi (eds),
La mathématique: Les Lieux et les temps.
Paris: CNRS Éditions, 2009

1. *Avant l'histoire, avant les mathématiques*

Les origines des premières techniques mathématiques se perdent dans la préhistoire. Sans remonter si loin on pouvait, dans les cultures sans écriture, construire des maisons aux angles pratiquement droits et indiquer les quantités, soit avec des mots représentant des nombres, soit avec des éléments matériels comme les pierres ou les doigts. Alors, on utilisait parfois des procédures ou des techniques d'un grand raffinement mathématique qui suggéraient la théorie des groupes abstraits de symétrie – par exemple, les règles qui déterminaient quels mariages étaient permis dans une tribu divisée en 12 groupes et à quel groupe appartenait un fils ou une fille. Des raffinements similaires existaient probablement aussi dans les sociétés préhistoriques.

Il serait tout à fait légitime de parler de *mathématiques* pour caractériser de telles techniques – dans un travail pionnier, Dirk Struik évoquait en fait les *Stone Age Mathematics* (Mathématiques de l'Age de pierre). Depuis quelques décennies, on parle souvent d'« ethnomathématiques » pour souligner le fait que ces techniques ne sont pas considérées, dans les cultures auxquelles elles appartiennent, comme des composants d'un ensemble correspondant à nos « mathématiques » [1].

2. *Uruk – une culture étatique empreinte de mathématique*

Si on adopte ce point de vue, les « vraies » mathématiques commencent avec l'apparition d'une coordination fondée sur une compréhension, au moins intuitive, des rapports formels entre des techniques à caractère mathématique jusqu'alors isolées les unes des autres. Avec cette définition, les mathématiques

1. Sur le sujet de l'ethnomathématique, voir Ascher [1991].

sont contemporaines – et ce n'est pas un hasard – de la première écriture et de la première organisation de la société comme *Etat*. Toutes trois semblent avoir fait leur apparition dans la seconde moitié du IVᵉ millénaire (avant Jésus-Christ, comme toutes les dates mentionnées dans ce chapitre), dans le sud de l'Irak d'aujourd'hui.

A cette époque, des changements climatiques ont permis l'introduction de l'irrigation artificielle dans cette région. La structure sociale, un temps basée sur la redistribution des vivres produits dans chaque village, s'était déjà transformée (au moins dans la vallée de Susiane, dans le Khuzestan voisin) en un système centralisé où une partie du produit de chaque village était conservée dans les temples de Suse, la ville centrale. Avec la forte augmentation de la production agricole dans le Sud mésopotamien, un système analogue mais encore plus élaboré s'est construit autour de la ville d'Uruk.

D'ores et déjà, la redistribution au sein des villages était basée sur la comptabilité. A partir de 8 000, on utilisait dans de nombreuses régions d'Anatolie, de Syrie, d'Irak et d'Iran, des jetons en terre cuite de formes sphérique, cylindrique, conique, etc., de toutes tailles. Le contexte archéologique donne à penser que les jetons symbolisaient des quantités déterminées de grains, d'huile et de têtes de bétail, et qu'ils servaient à une comptabilité interne au village. De plus, certains éléments indiquent que le responsable de la redistribution et de la comptabilité jouissait d'un grand prestige social. A cette centralisation de Susiane s'est ajouté ici un niveau inédit : les jetons se sont mis à servir au suivi des expéditions vers la métropole. Afin d'en assurer le contrôle, on les enfermait à l'intérieur de récipients scellés (ou « bulles »). Ces derniers portaient souvent, sur leur surface extérieure, des empreintes similaires aux jetons qui se trouvaient à l'intérieur, ce qui permettait de lire le contenu sans détruire le document.

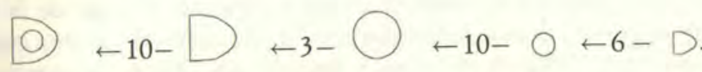
Amorçant la transformation du système, les administrateurs d'Uruk ont découvert que des empreintes pouvaient se substituer aux jetons. Ils ont donc commencé à faire des empreintes sur une tablette plate. Dans un second temps, ils ont créé un répertoire d'un millier de logogrammes (signes correspondant à des mots) destinés à une comptabilité beaucoup plus élaborée que celle de Suse, adaptée à un Etat bureaucratique qui était doté d'au moins trois niveaux de contrôle et, parallèlement, d'une grande division du travail. Etat qui n'aurait pas pu se créer sans le nouveau système de comptabilité, et que nous connaissons seulement grâce à lui[2].

La nouvelle écriture avait donc deux composantes. D'une part, un répertoire de logogrammes (dessins tracés sur des tablettes d'argile à l'aide d'un

2. Il n'existe aucune trace d'un développement progressif. L'écriture semble vraiment avoir été une création quasi instantanée. Sur le système des jetons, voir Schmandt-Besserat [1992].

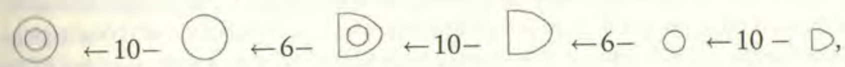
stylet pointu[3]). D'autre part, un répertoire de signes métrologiques et numériques produits par pression verticale ou oblique d'un stylet cylindrique (épais à une extrémité, fin à l'autre). Ces derniers semblaient donc représenter les sphères et les cônes, petits et grands, du vieux système de jetons, dont ils seraient en fait une continuation. Faut-il considérer l'écriture complète (logogrammes et signes métrologiques) comme un développement extraordinaire du système des jetons ou au contraire comme une nouvelle invention dans laquelle venait se greffer ce système ? La question suscite un débat passionné mais assez académique, qui ne nous concerne pas.

Ce qui nous concerne, en revanche, c'est la relation entre le vieux système et les nouvelles notations numériques et métrologiques. Les jetons étaient des symboles concrets – un symbole pour un nombre n'a aucune signification sans une indication de la chose dont on parle. Il est quasi certain que les vieux cônes et sphères représentaient le grain contenu dans des récipients particuliers, réels et normalisés mais qui n'avaient entre eux qu'un rapport approximatif. Dans le système écrit, les rapports entre les unités de grain étaient au contraire fixes (la notation est due à Jöran Friberg) :



Une petite sphère vaut donc 6 petits cônes, et ainsi de suite.

Dans l'écriture, il était également possible de « séparer quantité et qualité », c'est-à-dire de combiner un symbole purement numérique avec un logogramme – par exemple, le symbole pour 2 avec le logogramme « mouton ». Les symboles fondamentaux pour les nombres (les autres nombres étaient composés de façon additive) constituent cette série :



où le petit cône représente 1, la petite sphère par conséquent 10, et le grand cône 60. Le symbole pour 600 est intéressant, il pourrait être construit comme 10 fois 60. Comme les figures coïncident avec celles du système de grain mais que les rapports (et même l'ordre) sont différents et plus réguliers, cette série semble être une construction fondée, d'une part sur un système préexistant de nombres oraux, de l'autre sur des réflexions mathématiques, 60 étant une

3. Au IIIᵉ millénaire, les dessins étaient stylisés, composés de pressions obliques d'un stylet prismatique. Ainsi, l'écriture est-elle devenue « cunéiforme ». Jusqu'à la fin du IIIᵉ millénaire, on enseignait encore le dessin correspondant, comme le démontrent les variantes des signes. Au IIᵉ millénaire, il semble que le dessin fut oublié.

« grande unité » (avec seulement deux extrémités du stylet, il n'était pas possible d'écrire 3 600 avec un cône encore plus grand). La numération écrite allait peut-être déjà plus loin que système oral. En tout cas, elle était déjà sexagésimale, quoique non positionnelle.

Il existait une autre suite de nombres écrits, avec des signes qui représentent 1, 10, 60, 120 , 1 200  et 7 200 , utilisée dans des buts précis – et créée probablement pour faciliter certaines procédures bureaucratiques ; une suite pour les surfaces, elle aussi le résultat d'une normalisation mathématique qui redéfinissait des mesures « naturelles » (d'irrigation, de semence) de manière à les faire dépendre de la métrologie pour les longueurs ; et une suite pour un calendrier administratif, où chaque mois contenait 30 jours et chaque année 12 mois (en revanche, le calendrier sacré avait des mois de 29 ou 30 jours, et des années parfois de 13 mois). Les suites secondaires, par exemple pour le malt, utilisaient les symboles du système du grain (avec les mêmes valeurs) mais ornés de petites rayures.

Un dernier fait indique que la création des systèmes métro-numériques était fondée sur une pensée mathématique consciente. Il s'agit de la façon d'écrire les fractions : dans tous les systèmes, la première sous-unité s'obtenait en tournant le petit cône de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

Comme on l'a vu, la formation d'un véritable Etat a été conditionnée de manière décisive par l'existence d'un nouveau système de comptabilité. Dans les cités mésopotamiennes comme Uruk et ses voisines, jusqu'à l'effondrement de 1600 (voir ci-après), l'Etat fondait sa légitimité sur le fait qu'il était l'expression de la justice sociale, héritier qu'il était du vieux système de redistribution. Grâce aux jetons, la justice de redistribution était une justice calculée – et ainsi en était-il également de la « justice » dans l'Etat d'Uruk. Les terrains étaient attribués aux dignitaires du temple selon des rapports numériques précis – ce qui n'était possible que grâce à la nouvelle métrologie pour les surfaces. La nourriture et le fourrage étaient distribués aux ouvriers et au bétail sous forme de rations fixes, du moins pour le bétail, en fonction du calendrier administratif – on ne sait pas très bien si à Uruk déjà (comme plus tard) les ouvriers devaient effectuer le travail de 30 jours même au cours des mois qui n'en comptaient que 29.

Même la façon de *penser l'Etat* était marquée par les mathématiques. La « liste des professions », une des listes qui servaient à l'enseignement de l'écriture, dresse les divers champs d'activité, et pour chacun d'eux les niveaux de chef, de surveillant et de simple ouvrier – le même « produit cartésien » que nous trouvons dans les tablettes de comptabilité.

Nous ignorons tout de l'organisation de l'enseignement de l'écriture et des mathématiques, mais nous en connaissons assez bien le contenu. Environ 15 % des tablettes contiennent des listes « lexicales » de logogrammes organisés en catégories abstraites : professions (déjà mentionnées), lieux géographiques, récipients, oiseaux, etc. Le reste est composé de textes administratifs et comptables. Il n'existe aucun texte religieux ou littéraire, mais parmi les textes administratifs et comptables, un sous-groupe doit relever de la didactique des mathématiques : ils ne comportent pas le sceau du fonctionnaire responsable et ils contiennent des nombres trop grands ou des chiffres trop ronds pour être réels. Il n'existe aucune trace de pensée mathématique autre que cela, ni de jeux avec des nombres, ni de spéculations quelque peu théoriques. Les mathématiques étaient une composante de la culture d'Etat, et rien d'autre.

L'écriture et les mathématiques étaient, semble-t-il, complètement intégrées dans l'administration, et pas seulement au niveau intellectuel. En outre, la capacité d'écrire et de calculer était sans doute strictement réservée à la caste des administrateurs. Le métier de scribes en dehors d'elle n'existait pas.

3. *Le III^e millénaire sumérien*

Dans la première partie du III^e millénaire, un système polycentrique de cités-Etats, dirigées par des rois aux fonctions militaires, s'est développé dans le Sud de la Mésopotamie. Après deux ou trois siècles sans témoignages épigraphiques, l'écriture réapparaît, mais en utilisant alors des éléments grammaticaux rudimentaires qui nous permettent d'identifier la langue écrite comme étant le sumérien, bien que les noms employés montrent qu'on parlait déjà également l'akkadien, une langue sémitique dont le babylonien et l'assyrien sont des dialectes. Après 2400, se déroula une phase de centralisation, et vers 2350 Sargon, un roi akkadien, soumit tout le Centre et le Sud de la Mésopotamie. Les successeurs de Sargon étendirent d'abord leur domination sur la Susiane, dans la région syrienne (où fut détruite Ebla, puissante cité-Etat qui avait adopté la culture des scribes sumériens) et jusqu'à l'Anatolie, mais vers 2200 leur règne s'effondra. Après un siècle, une nouvelle centralisation eut lieu sous la « troisième dynastie d'Ur » (de 2112 à 2004 selon la « chronologie moyenne »), qui réunissait le Sud et le Centre sous une administration directe (sur laquelle nous reviendrons), soumettant le Nord et la Susiane à une domination moins directe (et moins durable).

Tous ces développements politiques ont influencé les mathématiques. Deux tendances générales se distinguent. En premier lieu, l'usage répandu du principe sexagésimal, autrement dit la création, dans les systèmes numéraux et métrologiques, d'unités plus grandes et de sous-unités plus petites, en multipliant et en divisant par 60. En second lieu, l'adaptation des métrologies aux procédures administratives. A l'évidence, ces tendances générales ne sont que la continuation de développements déjà commencés au IV^e millénaire.

Pourtant ces développements n'étaient pas qu'une simple continuation. Dans la ville de Shuruppak (vers 2600) et sur des sites contemporains, on a retrouvé des contrats écrits et des documents administratifs qui témoignent d'une structure sociale complexe, où les scribes jouaient un rôle fondamental et constituaient une vraie profession. On a également retrouvé un grand nombre de textes scolaires. Certains dérivent de listes lexicales du IV^e^ millénaire. D'autres appartiennent à de nouveaux genres. Il s'agit de textes littéraires (un hymne, des proverbes) et également de problèmes mathématiques non directement liés à la pratique, même s'ils sont formulés comme s'ils l'étaient – nous pouvons parler de problèmes « sur-utilitaires ». Par exemple, un problème du type : le contenu d'un silo à grain doit être distribué à un nombre d'ouvriers, par part de 7 sila (litres) pour chacun, le silo contenant 40 × 60 gur (tonneaux) de 8 × 60 litres. La réponse (164 571 ouvriers avec le reste de 3 sila) est donnée correctement sur une tablette, et sur une autre avec une erreur qui révèle la méthode (tout d'abord on divise 2 400 par 7, puis on multiplie le résultat par 480, et on convertit le reste de 6 gur en litres, etc.).

Ce problème appartient à ce qui semble avoir été un genre prisé : la division d'une quantité (soit un nombre, soit une unité métrologique), grande et entière, par un diviseur irrégulier (respect des facteurs des systèmes numéraux et métrologiques). D'autres problèmes suggèrent un début d'intérêt pour certaines configurations géométriques comme quatre cercles inscrits dans un carré.

On peut considérer l'emploi de l'écriture à des fins « littéraires » et du calcul dans des problèmes sur-utilitaires, comme un moyen de prouver la puissance des outils professionnels. Celui qui était en mesure d'écrire, de lire et de calculer en dehors du domaine administratif, c'est-à-dire de faire des choses que seuls d'autres scribes comprenaient, celui-là était un vrai scribe. Une telle dynamique se répète souvent dans l'Histoire. La raison n'est pas différente de celle pour laquelle les ingénieurs et les architectes au XIX^e^ siècle s'abonnaient souvent au *Journal des mathématiques élémentaires* et essayaient leur virtuosité professionnelle sur différents problèmes de construction géométrique proposés aux lecteurs.

Dans les siècles qui ont suivi, le pouvoir politique découvrit l'utilité de la littérature comme moyen de propagande. Sargon, en particulier, faisait réécrire les hymnes religieux de telle sorte qu'ils servent son règne. En revanche, les mathématiques sur-utilitaires n'avaient pas ce genre d'exploitation politique. A l'époque des Sargonides, nous assistons donc à un effort pour homogénéiser les métrologies afin de faciliter une comptabilité élargie à la mesure du nouvel Etat – par exemple, substituer aux divers gur locaux un « gur royal » de 300 sila, une valeur qui facilitait certains calculs administratifs. Par ailleurs, l'école des scribes continuait à enseigner les mathématiques sur-utilitaires

– par exemple (fait important par la suite), trouver une dimension d'un terrain rectangulaire si la surface et l'autre dimension sont données. Compte tenu de la métrologie pour les surfaces, on ne traite pas ce genre de problème d'une simple division numérique. Et à l'évidence ce n'est pas un problème auquel se heurte un arpenteur dans la pratique de son métier. Une tablette nous montre un exemple plus élaboré de savoir géométrique sans utilité pratique : le fait qu'un trapèze soit divisé au milieu par une ligne parallèle aux bases, dont le carré est la moyenne arithmétique entre les carrés de celles-ci.

Des indices de nature linguistique suggèrent, mais sans le démontrer, que ces devinettes ont été reprises à l'école (où tout était fondé sur le sumérien) par un milieu akkadien d'arpenteurs « laïcs » (c'est-à-dire non scribes). En revanche, ce qui est plus certain, c'est le fait que dans les siècles qui ont suivi, ce type de savoir était transmis dans un tel milieu. Comme l'arpentage dépendait de métrologies créées dans l'entourage des administrateurs du quatrième millénaire, il est évident que l'inspiration ultime du milieu laïc est venue de la sphère « savante ». Nous ne savons rien de certain sur le moment de la séparation entre les deux. Les contrats de Shuruppak sur les ventes de terrains parlent, outre du scribe, également d'un arpenteur. Ce dernier pourrait être un scribe spécialisé, mais il pourrait aussi être un membre d'un groupe laïc. Dans ce dernier cas, la profession des arpenteurs serait contemporaine du métier autonome des scribes.

Les mathématiques utilisées à l'époque sargonique n'ont pas disparu avec l'effondrement de l'empire de Sargon, même si nous disposons de peu de témoignages directs sur ce qui se faisait dans les villes devenues indépendantes. L'époque d'Ur III, en revanche, représente un changement fondamental.

Le tournant ne fut pas la fondation de la dynastie en 2112, mais une réforme militaire en 2074 et une réforme administrative l'année suivante (certainement déjà préparée par de multiples façons). Selon des règles qui initialement résultaient d'un état d'urgence mais qui par la suite seraient devenues permanentes, l'immense majorité des ouvriers du noyau de l'empire fut intégrée dans des groupes de travail commandés par des scribes. Un scribe était responsable du travail du groupe, calculé selon des règles fixes (tant de terre creusée et tant de terre portée sur une certaine distance par jour, etc.) et converti en unités abstraites (parfois $\frac{1}{60}$ d'un jour travaillé, parfois une unité de poids d'argent ou de grain). Pour chaque mois (même ceux ne comportant que 29 jours), le chef devait faire réaliser par les ouvriers le travail de 30 jours. Les ouvriers prêtés à des collègues, les malades, les fugitifs ou les morts étaient mis au crédit, ceux empruntés au débit. Le déficit du scribe se cumulait d'année en année (les soldes créditeurs sont rarissimes). A sa mort, la famille était tenue responsable du déficit. Si le scribe n'était pas en mesure de payer, les proches étaient intégrés dans les groupes de travail[4]. Les tablettes de comptabilité de l'époque se comptent par dizaines de milliers.

Calculer toute une économie centralisée est une vraie gageure. Les additions et les soustractions se faisaient sans difficulté avec les moyens traditionnels. On employait une espèce d'abaque, probablement avec des représentations différentes pour les unités et les dizaines. Cet abaque avait, semble-t-il, cinq « colonnes sexagésimales », et il était appelé de manière métaphorique « la main ». Par contre, les multiplications et les divisions étaient difficiles, et elles étaient peu nombreuses. Le fait que les métrologies n'étaient pas complètement sexagésimales compliquait la tâche (par exemple, l'unité fondamentale de longueur, un nindan – une perche longue de 6 mètres – consistait en 12 kush/coudées, et chacun d'eux en 30 doigts).

Pour faciliter les choses, il a fallu introduire plusieurs innovations. Tout d'abord, on a créé, pour les calculs intermédiaires, une numérotation de position « à virgule flottante » et en base 60 – c'est-à-dire que le nombre qui est translitéré 12.40 pouvait signifier $12 \times 60 + 40 = 760$ (dans ce cas nous utilisons la transcription 12,40), mais aussi $12 + \frac{40}{60} = 12 + \frac{2}{3}$ (transcrit 12;40) ou tout autre nombre $60^n \times \left(12 + \frac{2}{3}\right)$, n positif ou négatif. En outre, on produisait des tables d'inverses (ainsi, la division par n était réduite à une multiplication par $\frac{1}{n}$) et des tables de multiplication des nombres importants, particulièrement ceux qui se trouvaient dans la table d'inverses, par les nombres 1, 2, 3, ..., 19, 20, 30, 40, 50. Des tables métrologiques exprimaient les différentes unités métrologiques en termes sexagésimaux d'une unité de base (par exemple, un kush comme 5 [c'est-à-dire $\frac{5}{60}$] nindan, et un doigt comme 10 [c'est-à-dire, $\frac{10}{3\,600}$] nindan). Enfin, des tables de constantes techniques étaient créées, par exemple, quelle quantité de terre un ouvrier devait creuser par jour.

Le pas décisif ne fut pas *l'invention* du système de position. Une invention n'était sans doute pas nécessaire non plus, puisque le principe était inhérent à l'abaque. Cependant, sans tables à portée de chaque scribe (ou, mieux, apprises par cœur), le système de position n'aurait servi à rien. Sa mise en œuvre supposait une décision au niveau de l'Etat et une réforme du programme scolaire.

4. L'assyriologue Robert Englund, qui a déchiffré le système dans les années 1980, en parlait comme d'un « système de Kapos ».

Les seuls documents mathématiques de type scolaire mis au jour sont, comme plus de mille ans auparavant à Uruk, des documents modèles. Ils sont eux-mêmes rares, et l'absence de problèmes sur-utilitaires proprement dits ne prouve pas grand-chose, étant donné que les archéologues n'ont jamais découvert d'école de l'époque. Plus significatif est le fait que tout le vocabulaire nécessaire pour formuler de tels problèmes, absent du sumérien, a été reconstruit dans la période suivante. Les scribes-contrôleurs ne semblaient même pas disposer de ce minimum de liberté intellectuelle que comporte la solution de problèmes mathématiques.

Dans le même temps – et cela peut sembler un paradoxe –, la figure du scribe était célébrée. Shulgi, le roi à l'origine de la réforme de 2074/2073, faisait raconter dans ses hymnes panégyriques qu'il maîtrisait totalement l'art du scribe. Mais en ce qui concerne les mathématiques, il disait seulement avoir appris à additionner, à soustraire, à compter et à faire la comptabilité. Etant donné que pour le reste, Shulgi se vantait de toutes les prouesses possibles (et impossibles), il semblerait vraiment que les mathématiques du scribe n'aient pas dû aller au-delà de ce niveau.

Le roi se targuait également d'incarner la justice. Hormis des lieux communs vieux de plusieurs siècles, sa justice était celle de la réforme métrologique et de la comptabilité. Comme cela avait été déjà le cas sous la domination d'Uruk au IV[e] millénaire, l'Etat de Shulgi trouvait sa légitimité dans le fait qu'il était la manifestation de la justice. Et la justice consistait en une exploitation – exploitation extrême, comme le prouve l'enregistrement scrupuleux des rations de nourriture distribuées aux ouvriers et de la mortalité de ceux-ci – qui n'était pas arbitraire mais contrôlée mathématiquement (« avec une précision chirurgicale », dirions-nous aujourd'hui).

4. *Apogée paléo-babylonien*

L'empire d'Ur III ne dura pas. Déjà en 2025, les régions périphériques se rebellèrent, et vingt ans après, même le centre de l'empire se désintégra en petits Etats. Quelques uns absorbèrent progressivement les autres, et au XVIII[e] siècle, Hammourabi, roi de Babylone, réussit à soumettre tout le Sud et le Centre. A partir de ce moment, on peut parler de cette région comme de la « Babylonie ». La période de 2000 à 1600 est appelée « paléo-babylonienne », et elle a produit des mathématiques avancées.

Le « taylorisme » d'Ur III ne dura pas non plus. La période paléo-babylonienne se caractérisait par l'individualisme, au niveau tant économique (même s'il est trop tôt pour parler d'une véritable économie de marché) que culturel. La terre, au lieu d'être travaillée par des groupes, était souvent attribuée à des locataires sous contrat. Les correspondances privées virent le jour (commerciales et personnelles, les lettres d'Hammourabi étaient même célèbres), écrites souvent par des scribes indépendants, et la comptabilité privée gérée par eux. Le sceau devint une marque d'identification personnelle et non professionnelle. On peut parler de naissance d'une *idéologie de l'identité personnelle.*

Ce qui est important pour notre sujet, c'est la manifestation particulière de cette idéologie chez les scribes. Manifestation particulière que nous connaissons assez bien grâce aux textes utilisés pour faire comprendre aux élèves ce qu'est un *vrai* scribe.

Il était possible d'écrire en babylonien de manière phonétique à l'aide d'un syllabaire de 70 signes ou moins. Mais un vrai scribe utilisait également beaucoup de logogrammes – les mêmes que ceux de l'écriture sumérienne, bien que désormais prononcés en babylonien. Mais cela ne suffisait pas pour démontrer que le scribe était une personne hors du commun. Il devait également être en mesure de lire, d'écrire *et de parler* le sumérien – une habileté que seuls les autres scribes pouvaient apprécier[5]. Il devait pouvoir lire des textes bilingues, connaître toutes les significations des caractères cunéiformes – le sens phonétique (ou les sens phonétiques, parce que souvent il y en avait plusieurs), les sens logographiques normaux, et divers sens secrets (tant en sumérien qu'en babylonien). Et il devait comprendre la musique et les mathématiques. Le tout s'appelait (et c'est authentique) *humanisme* (*nam-lú-ulù*, en sumérien « le fait d'être un homme », comme *lú* correspond au latin *vir*, que nous pourrions traduire par *virtuosité* en gardant à l'esprit l'étymologie de ce terme).

Malheureusement, les textes qui servaient à inculquer l'idéologie professionnelle des scribes ne précisent pas *quelles* étaient les mathématiques utilisées à des fins « humanistes ». Nous décrirons donc d'abord les mathématiques qu'on enseignait à l'école. Il sera ensuite plus facile d'émettre des hypothèses.

Laissons de côté les textes économiques (par exemple, comptables) où figurent des chiffres. Ils donnent des informations sur la métrologie, mais à part cela ils confirment seulement que les techniques développées au III[e] millénaire – en particulier durant la période d'Ur III – fonctionnaient encore. Pour connaître la pensée et le savoir mathématiques, nous devons considérer les textes mathématiques au sens strict.

De ceux-ci, il en existe trois principaux types (qui n'épuisent pas complètement l'ensemble du corpus) : tables, « calculs nus » et problèmes. Outre les

5. Une vraie habileté. Le sumérien et le babylonien sont aussi différents l'un de l'autre que le basque de l'espagnol. Outre le vocabulaire, les scribes devaient donc comprendre les éléments d'une grammaire totalement différente de la leur. Sans les listes lexicales préparées par les maîtres babyloniens et leurs explications, il aurait été impossible à l'âge moderne de déchiffrer les textes sumériens.

tables des réciproques et des produits, et les tables métrologiques et de constantes techniques, les carrés, les cubes et les nombres de type $n^2 \times (n+1)$ étaient mis en tableaux. Les « calculs nus » donnent en général des produits, des carrés ou des réciproques de nombres (autres que ceux contenus dans la table standard). Ils se trouvent souvent au dos des tablettes qui portent des proverbes ou d'autres fragments de littérature sumérienne. Les élèves qui apprenaient le calcul élémentaire se trouvaient donc à un niveau déjà avancé dans l'étude de l'écriture et de la langue.

Le niveau avancé des mathématiques se voit dans le corpus des textes de problèmes. Ce corpus peut être subdivisé de plusieurs façons. Certains textes contiennent un ou deux problèmes, d'autres davantage. Parmi ces derniers, on trouve des problèmes « thématiques » et des textes « d'anthologie » qui contiennent un mélange de problèmes divers. On notera qu'il n'existe pas de textes qui combinent des problèmes mathématiques avec d'autres sujets, ni avec des matières numérologiques. Les *mathématiques* comme discipline cohérente et délimitée, sont donc un concept qui n'appartient pas qu'à nous, mais également aux scribes paléo-babyloniens.

Tant les anthologies que les textes contenant peu de problèmes donnent en général non seulement l'énoncé de ces derniers mais expliquent aussi le procédé à suivre. Certains textes thématiques le font également, d'autres en revanche sont des « catalogues » qui donnent uniquement des énoncés (parfois avec la solution, ce qui permettait le contrôle). On peut penser que les catalogues permettaient au maître de donner des problèmes analogues, mais différents, à ses élèves.

Les problèmes peuvent être classés selon la matière ou selon la méthode qui est appliquée. En tout cas, certains d'entre eux traitant, par exemple, du volume d'une excavation prismatique peuvent être résolus par la formule du volume. D'autres exigent l'application de méthodes « algébriques », d'autres encore demandent des méthodes que nous avons tenté de caractériser comme « théorie des nombres ». C'est pourquoi il vaut mieux discuter d'abord des méthodes de base, qui sont aussi celles qui ont généralement une application réelle, pour nous concentrer après sur les matières sur-utilitaires (qui supposent justement les méthodes de base).

Dans la pratique, la proportionnalité (mais pas une théorie des proportions comme chez les Grecs !) et la proportionnalité inverse sont fondamentales. Elles se révèlent nécessaires pour l'utilisation des tables de constantes techniques : si un seul homme peut porter 540 briques d'un certain type pour 30 nindan en un jour (une constante technique), combien de jours-homme faut-il pour transporter N briques pour M nindan ? Dans les calculs géométriques, on utilisait également le fait que toutes les longueurs dans une configuration de forme bien définie sont proportionnelles, et que les surfaces sont proportionnelles au carré d'une dimension linéaire. Dans les deux cas, les facteurs de proportionnalité étaient énumérés dans les tables de constantes techniques. Les paramètres de base étaient habituellement des extensions extérieures, par exemple, le périmètre et non le diamètre d'un cercle.

La surface d'un cercle était donc calculée comme $\frac{1}{12}$ du carré (géométrique !) construit sur le périmètre, celle d'un demi-cercle au contraire comme $\frac{1}{4}$ du produit du diamètre (extérieur dans ce cas) et du demi-périmètre. La raison en est évidente : pour les objets matériels, les dimensions extérieures sont plus facilement mesurables.

Il n'existait pas de concept d'angle comme grandeur mesurable. On distinguait les angles pratiquement droits (angles pertinents pour le calcul des surfaces) des angles obliques (et donc non pertinents). Les superficies réelles étaient subdivisées en quadrilatères et triangles pratiquement rectangulaires. Pour les quadrilatères dont les côtés opposés n'étaient pas exactement égaux, on utilisait alors la « formule des arpenteurs » : la moyenne des longueurs multipliée par la moyenne des largeurs. Pour les triangles, on multipliait *la* longueur – c'est-à-dire, celle pertinente, celle pratiquement perpendiculaire à la base – par la moitié de celle-ci[6]. Tout cela remonte au moins à Ur III, très probablement au IV^{e} millénaire.

Les volumes de prismes se calculaient comme nous le faisons, avec une particularité. L'unité standard pour la distance horizontale était le nindan (une perche d'environ 6 m), mais pour la distance verticale c'était le kush ($\frac{1}{12}$ nindan, environ 50 cm). La mesure de base pour les surfaces était donc le sar, un nindan^2 – mais la même unité servait à mesurer les volumes, puisqu'elle s'entendait comme pourvue d'une hauteur « virtuelle » d'un kush. Pour calculer un volume d'un prisme de base *B* sar et hauteur *a* kush, on « soulevait » *B* depuis la hauteur virtuelle 1 jusqu'à la hauteur réelle *a*. S'agissant d'une opération de proportionnalité, le verbe *soulever* était en règle générale utilisé ensuite pour toutes les multiplications basées sur la proportionnalité – et donc pour toutes celles basées sur les constantes techniques.

6. La légende veut que les Babyloniens aient trouvé la surface d'un triangle générique à partir de deux côtés quelconques. Cela est clairement prouvé par les plans de terrains qui sont parvenus jusqu'à nous. Mais d'habitude, on interprète une description mathématique comme une référence à la situation plus simple à laquelle elle pouvait correspondre. Le terme que nous traduisons par « triangle » (littéralement ce serait « clou ») est donc un triangle dans lequel la surface se trouve de façon assez précise comme le produit de la longueur (distincte de la « longueur longue », l'hypoténuse) par la demi-largeur. De façon similaire, « longueur-largeur » était l'expression employée pour un rectangle. Le lecteur ne s'étonnera pas d'apprendre qu'un « rectangle » qui n'est pas précisé doit être un quadrilatère, et non un triangle rectangulaire – le langage mathématique est toujours économique, et l'économie suppose les habitudes du milieu mathématique local.

Le volume d'un tronc de cône est le produit de la hauteur avec la section transversale coupée à mi-hauteur. Dans un texte, on propose de trouver le volume d'un tronc de pyramide de la même façon. Dans un autre, on trouve le résultat correct – il est impossible de savoir si le raisonnement soumis est valide.

A la limite entre « utile » et « sur-utilitaire », on peut mentionner le fait que le « théorème de Pythagore » était connu, évidemment non pas comme théorème – il n'existait pas de théorèmes dans les mathématiques babyloniennes – mais comme règle (il est cité comme tel dans un texte).

Le niveau sur-utilitaire a deux composants principaux (même s'il n'est pas exhaustif). L'un est ce qu'on appelle « algèbre ».

Les problèmes « algébriques » parlent des côtés et des surfaces de rectangles et de carrés. Lorsqu'ils ont été découverts aux alentours de 1930, on croyait que ce langage géométrique était artificiel, qu'il fallait comprendre les côtés comme des nombres algébriques inconnus, et les surfaces comme des produits. Une analyse précise du vocabulaire montre cependant que cette interprétation ne tient pas : elle ne réussit pas à expliquer pourquoi les textes distinguent deux opérations additives différentes (à savoir, opérations qui dans l'interprétation numérique étaient traduites comme addition), deux opérations soustractives différentes, deux « moitiés » différentes, et quatre « multiplications ». En outre, certaines phrases récurrentes n'ont apparemment aucun sens et n'apparaissent pas dans les traductions, et certaines procédures s'expliquent mal. En revanche, si nous acceptons les termes géométriques des textes, tout s'éclaircit.

Au cœur de la discipline se trouvent deux problèmes sur les rectangles et deux autres sur les carrés. Les problèmes sur les rectangles sont du même groupe que deux autres déjà apparus à l'époque sargonique. Si $\sqsubset\!\sqsupset(u,v)$ désigne la surface d'un rectangle avec des côtés *u* et *v*, le groupe est :

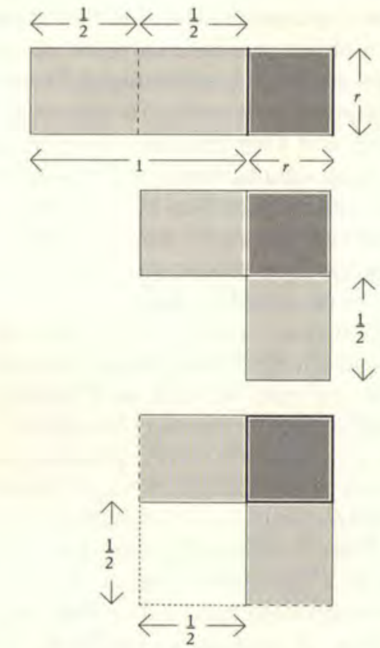
$$(1)\ \sqsubset\!\sqsupset(u,v) = \alpha, u = \beta \qquad (3)\ \sqsubset\!\sqsupset(u,v) = \alpha, u+v = \beta$$
$$(2)\ \sqsubset\!\sqsupset(u,v) = \alpha, v = \beta \qquad (4)\ \sqsubset\!\sqsupset(u,v) = \alpha, u-v = \beta.$$

Avec les méthodes développées durant Ur III, (1) et (2) demandent seulement l'utilisation des tables métrologiques, d'inverses et de multiplication. (3) et (4) en revanche, sont du second degré. Il existe également deux problèmes fondamentaux sur les carrés :

$$(5)\ \square(r) + \alpha r = \beta \qquad (6)\ \square(r) - \alpha r = \beta$$

Examinons de près un exemple de type (5), le premier problème de la tablette BM 13901. La traduction (y compris des nombres sexagésimaux) en est :

1. J'ai mis ensemble la surface et ma confrontation : c'est $\frac{3}{4}$. 1 le forjet
2. tu poses, la mi-part de 1 tu brises, tu fais que $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ se tiennent,
3. $\frac{1}{4}$ à $\frac{3}{4}$ tu ajoutes : 1, fait que 1 soit équilatéral. $\frac{1}{2}$ que tu as fait tenir
4. du cœur de 1 tu arraches : $\frac{1}{2}$ est la confrontation.



Une explication de la terminologie s'impose. Une *confrontation*, c'est-à-dire « une situation caractérisée par la confrontation entre égaux », désigne la configuration quadratique, et elle coïncide numériquement avec le côté du carré. Conformément à la définition euclidienne de la notion de « figure » (le contenu), notre carré *est* sa surface (par exemple 24 m²) et *possède* un côté (2 m). La « confrontation », au contraire, est son côté et possède une surface (nous voyons encore la règle fondamentale de l'élément extérieur). *Mettre ensemble* est une opération additive symétrique qui permet d'additionner des mesures numériques même si les entités mesurées n'appartiennent pas à la même catégorie (par exemple, surfaces et longueurs, ou jours, briques et ouvriers). *Ajouter*, en revanche, est une opération additive asymétrique qui s'emploie uniquement pour des opérations qui ont un sens concret. Le « forjet » est une ligne de longueur 1. Appliquée perpendiculairement à une ligne de longueur r, elle produit un rectangle de surface $r \times 1 = r$. La *mi-part* est une moitié « naturelle », une moitié qui ne pourrait être que la moitié[7]. *Briser* est l'opération qui produit une telle mi-part. *Faire que* les lignes a et b *se tiennent* se réfère à la construction du rectangle contenu à l'intérieur des côtés a et b. *A fait que b soit équilatéral* veut dire que b est le côté du carré de surface

7. Le rayon d'un cercle est la demi-part du diamètre ; la surface d'un triangle rectangle est le produit de la longueur par la mi-part de la largeur.

A. *Arracher* est une opération soustractive concrète, contraire à celle d'« ajouter » ; « arracher *p de T* » suppose que p soit une partie d'un total T (dans le cas présent du *cœur* de T).

Nous savons donc que la somme numérique de la surface d'un carré (gris sombre sur le diagramme) et de son côté r est $\frac{3}{4}$. Pour convertir cela en une situation ayant une interprétation concrète, on pose (diagramme ci-dessus) un « forjet » du côté du carré, ce qui produit un rectangle (gris clair) dont la surface est égale au côté. Ensemble, le rectangle et le carré original forment la surface $\frac{3}{4}$. Ensuite, le forjet est cassé en deux, et une mi-part (avec la partie du rectangle qu'elle représente) ombrée de manière à contenir, avec l'autre mi-part, un rectangle (carré évidemment), de surface $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Ce nouveau carré s'ajoute à la figure grise (sombre+clair), dont la surface est encore de $\frac{3}{4}$. Le total est un carré de surface $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, et donc de côté 1. Une fois exclue la mi-part ajoutée sous le carré, il reste $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, qui est le côté du carré original.

Les étapes correspondent bien à notre façon de résoudre l'équation analogue :

$$
\begin{aligned}
x^2 + 1 \cdot x = \frac{3}{4} \quad & \Leftrightarrow x^2 + 1 \cdot x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\
& \Leftrightarrow x^2 + 1 \cdot x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \\
& \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \\
& \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \sqrt{1} = 1 \\
& \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Cependant, l'analogie va au-delà de l'homomorphie des étapes. A l'instar du nôtre, le procédé babylonien est *analytique*, c'est-à-dire que la grandeur inconnue est traitée comme une grandeur normale, et par des étapes rendues possibles de cette façon, elle se sépare progressivement de la relation complexe dans laquelle elle est initialement impliquée. En outre, comme nous, le calculateur babylonien procède lui aussi « avec naïveté », c'est-à-dire qu'il ne demande pas pourquoi les transformations sont valides ni sous quelles conditions elles le sont. A l'évidence, il nous est possible de transformer le procédé en un argument critique qui discute de la validité et des conditions (exactement la définition que donne Kant de la « critique »), en faisant valoir, par exemple, que l'avant-dernière étape est valide uniquement si nous restons dans le domaine des nombres non négatifs. Mais nous ne le faisons pas habituellement, car il est également pour nous plus économique de ne pas faire la critique explicite dans les situations que nous connaissons bien et de prendre pour évident ce qui paraît évident.

La procédure suivie pour les problèmes de type (5) est également valable pour ceux de type (4) et (6) : l'astuce du forjet – utilisé aussi dans le type (6) – permet de trouver exactement le rectangle avec différence connue entre les côtés, à savoir qu'il se réduit au type (4). Le type (3) demande un procédé différent – mais du même genre –, il correspond à celui des *Elements* d'Euclide, II.5, tandis que le type (4) correspond au cas *Elements* II.6. Des problèmes non normalisés le devenaient par le biais d'un « changement de variable » $-\alpha \square (r) + \beta r = \gamma$ devenant $\square (\alpha r) + \beta(\alpha r) = \alpha\gamma$.

Ces méthodes, avec les techniques de transformation des relations linéaires, constituaient « les éléments » de l'« algèbre » paléo-babylonienne. Elles permettaient de résoudre des problèmes sur 2, 3 carrés ou plus avec des relations linéaires connues entre les côtés et les surfaces. Il en est de même pour les problèmes « duaux » où étaient connus les côtés et inconnus les paramètres des relations. Tout comme pour les problèmes biquadratiques – et même bi-biquadratiques dans un texte. En outre, ces méthodes servaient à résoudre des problèmes non géométriques – une longueur peut représenter un prix, un nombre d'ouvriers ou un nombre de la table de réciproques, et un problème biquadratique une surface. La géométrie des lignes et des surfaces mesurables était donc une représentation neutre, fonctionnellement abstraite. Sous tous les aspects – excepté le fait que la représentation neutre était géométrique et non numérique –, l'« algèbre » paléo-babylonienne était donc une algèbre dans le même sens que l'algèbre des équations des mathématiques appliquées.

Le point de départ de l'algèbre semble avoir été un emprunt au milieu des arpenteurs. L'autre aspect essentiel du niveau sur-utilitaire explorait les propriétés du système sexagésimal, son point de départ était donc la tradition de calcul des scribes.

Un jeu assez simple est celui de la construction de suites de produits : par exemple, en multipliant d'abord 9 par 9, puis le résultat par 9, etc., jusqu'à 9^{10} (mais sans indiquer le rang du produit, c'est-à-dire l'exposant). Egalement simple (et à peine sur-utilitaire), une des techniques pour trouver les inverses des nombres « réguliers » par rapport au système sexagésimal (nombres de type $2^p3^q5^r$, p, q et r entiers) mais qui n'apparaissent pas dans la table standard : si $\bar{n}$ est l'inverse de n et $\bar{a}$ celui de a (dans la pratique, avec $a = 2$, 3 ou 5), alors $\bar{a} \times \bar{n}$ est l'inverse de $a \times n$.

Il existe en revanche une autre technique plus raffinée, qu'on peut employer pour trouver, par exemple (exemple simple !), la réciproque de 1.51.6.40 (souvenons-nous que la transcription avec les points est à virgule flottante). D'après la table standard, on sait que 6.40 est l'inverse de 9. Nous multiplions donc par 9 pour éliminer les deux dernières positions. Nous trouvons 16.40. Comme 6.40 est $\frac{1}{9}$, nous multiplions par 9, ce qui donne 2.30. Donc 1.51.6.40 est égal à $2.30/(9 \times 9)$, et puisque l'inverse de 2.30 est 24, l'inverse de 1.51.6.40 est $24 \times 9 \times 9 = 32.24$.

Il est également possible de combiner la « théorie des nombres » avec l'algèbre. De fait, certains problèmes sur les excavations prismatiques se réduisent, au moyen de méthodes appartenant à l'algèbre, à des problèmes sur les nombres. Prenons quelques exemples : trouver un nombre p tel que $p \times p \times (p + 1) = 4{,}12$; trouver p tel que $p \times p \times (p + 7) = 8$; trouver trois nombres p, q et r tels que $p \times q \times r = 0;36$, $p + q = 1$, $r = p + 0;6$. On résout le premier cas, dit le texte, au moyen de la table « équilatérale, un supplément », c'est-à-dire la tabulation de $n^2 \times (n + 1)$. Dans les autres cas, la solution doit être devinée ou facilitée par une factorisation. Une autre combinaison d'« algèbre » et de théorie des nombres se trouve dans la fameuse tablette Plimpton 322, qui utilise des couples de nombres mutuellement réciproques pour construire des triplets pythagoriciens, *peut-être* dans le but de construire des problèmes algébriques résolubles.

Il n'existe aucun théorème explicite, au niveau aussi bien utilitaire que sur-utilitaire. Deux textes contiennent des règles formulées de façon abstraite. Tous deux sont proches des milieux profanes. L'école a apparemment renoncé à l'application de telles règles, considérées comme inefficaces sur le plan pédagogique. En revanche, on employait comme méthode didactique générale des exemples paradigmatiques accompagnés d'explications. Ces explications étaient généralement orales et n'ont pas laissé beaucoup de traces. Mais l'existence de deux textes explicites nous permet de reconnaître également des vestiges de la didactique orale dans d'autres sources.

Tous les textes mathématiques sont de nature scolaire. Même les tables étaient copiées à l'école, comme moyen d'apprendre par cœur. Il est évident que le niveau de base a servi au travail futur des élèves, ce qui ne pourrait en aucune façon être le cas ni de l'algèbre de second niveau, ni du calcul des réciproques autres que simples. Comme l'écriture sumérienne, ces mathématiques avancées faisaient partie de ces choses que seuls les autres scribes pouvaient apprécier. Nous devons en conclure qu'elles expriment la virtuosité des scribes, leur *humanité* particulière. Cela explique également l'absence de motivation pour développer des mathématiques de théorèmes : un roi comme Shulgi pouvait se vanter d'exploits physiques (il était également un chef militaire), mais le scribe devait seulement s'enorgueillir de prouesses qui avaient un rapport avec ses obligations professionnelles : *écrire*, non seulement l'akkadien parlé par le patron, mais également des choses extrêmement difficiles, et faire des *calculs*, non seulement ceux demandés par ce même patron mais aussi ceux que ce dernier ne comprenait pas. Produire des théorèmes n'aurait pas exprimé la virtuosité *de scribe*.

Pour nous, un mathématicien n'est pas celui qui sait utiliser les mathématiques (ou qui en enseigne l'utilisation), aussi avancées soient-elles. C'est plutôt celui qui développe le savoir mathématique. En ce sens, il semble que les maîtres qui enseignaient les mathématiques dans les écoles paléo-babyloniennes n'étaient pas des « mathématiciens », mais plutôt des enseignants du calcul, y compris le calcul trop raffiné pour servir dans la pratique. Une conclusion qui risque pourtant d'être hâtive, et ce pour deux raisons.

Tout d'abord, il y a la *construction* des problèmes. De nombreux problèmes peuvent certainement être construits à partir d'une solution connue. Si nous prenons un carré de côté $\frac{1}{2}$, il est évident que la somme de la surface et du côté est $\frac{3}{4}$, et que le problème peut être résolu par le biais de la technique décrite ci-dessus. Si nous prenons un rectangle de longueur 0;40 et de largeur 0;30, il est aussi évident que sa surface est de 0;20, et que le rectangle contenu par la diagonale et par le cube sur la longueur est de 0;14,48,53,20. Mais il n'est pas évident que ces deux informations produisent un problème résoluble (à savoir, bi-biquadratique). Seule une recherche systématique, guidée sur plusieurs étapes intermédiaires – et donc un travail de mathématicien –, peut en donner l'idée. Mais ce travail de mathématicien était un travail personnel, qui n'a pas fait l'objet d'une publicité dans les textes.

Une analyse précise de la terminologie révèle en outre que diverses écoles, chacune à sa façon, se sont efforcées de créer un moyen canonique pour exposer les mathématiques et pour établir par certains moyens (de façon « critique ») sa cohérence. Le but en était probablement didactique (et peut-être motivé par la volonté de se distinguer d'autres écoles). Mais si l'objectif n'était pas la pureté et la cohérence des mathématiques, on peut qualifier ces efforts de mathématiques (c'est ce qu'a voulu faire à un autre niveau le groupe Bourbaki, en prenant la *Modern Algebra* de Van der Waerden comme modèle, d'abord pour la topologie, ensuite pour toutes les mathématiques). Même si (comme de nos jours) la plupart des enseignants de mathématiques n'étaient pas des mathématiciens, les mathématiciens paléo-babyloniens étaient enseignants.

5. *Invisibilité et nouvelle visibilité*

L'empire d'Hammourabi ne se stabilisa jamais. Passé le milieu du siècle, les forces centrifuges ne se laissaient plus dominer, et en 1600, une incursion des Hittites détruisit la ville de Babylone. Par la suite, quand un peuple tribal (les Cassites) asservit la région, commença ce qu'on a appelé « le Moyen-Age babylonien ». L'urbanisation se réduisit fortement, et les écoles de scribes disparurent. En revanche, le métier de scribe se transmit à l'intérieur des « familles » – parfois peut-être seulement des familles d'adoption, souvent probablement de vraies familles.

Sans l'institution scolaire, les mathématiques disparurent de l'horizon archéologique. Le millénaire qui a suivi l'effondrement paléo-babylonien nous a laissé seulement deux textes mathématiques : une table de constantes techniques et un texte contenant un problème sur la division d'un trapèze, à l'évidence de tradition paléo-babylonienne mais résolu avec une actuce. Dans la période tardive, les mathématiques des scribes ont fait leur réapparition, signe de la survivance des mathématiques utilitaires. Une analyse terminologique montre que les milieux sans connaissance du sumérien – donc distincts du milieu dit des scribes – en sont responsables, au moins en partie.

Il aurait existé dans la période de domination perse (539-330) un texte qui commençait avec les nombres sacrés des dieux et continuait avec une table métrologique : la distinction paléo-babylonienne entre numérologie et mathématiques n'existait donc plus. Un autre texte retrouvé sur le même site contient des problèmes géométriques de second degré, résolus à la manière des paléo-babyloniens. Mais on ne traite plus d'algèbre, c'est-à-dire d'une représentation géométrique neutre. En fait, il s'agit de vrais problèmes géométriques, qui supposent même une nouvelle métrologie pour le démontrer[8]. Ce sont les problèmes (1)-(4) énoncés plus haut, plus une autre énigme mathématique de tradition laïque (trouver les côtés de deux carrés concentriques, quand la surface du ruban intermédiaire et sa largeur sont données). Un troisième texte traite de problèmes de métrologie des surfaces.

Ces tablettes appartenaient à des scribes qui se posaient en « exorcistes », donc possesseurs d'un savoir occulte. Il n'est guère surprenant qu'ils n'aient pas fait la distinction entre la numérologie sacrée et les mathématiques. Il est plus remarquable qu'ils se soient intéressés à l'arpentage, aussi bien réel qu'imaginaire, puisque cela ne faisait presque certainement pas partie de leurs tâches. Il s'agissait probablement d'une tentative de restaurer la tradition. De fait, on copiait encore les textes qui inculquaient la doctrine professionnelle de l'école paléo-babylonienne. La tradition elle-même a été perdue,

8. La métrologie anglaise nous permet une analogie : trouver un rectangle de surface 10 (acres), dont la longueur dépasse la largeur de 279 (yards) (1 acre égale 4 840 yard^2).

mais pas toutes les connaissances de son contenu. Pour les compléter, le savoir des arpenteurs était exploité – comme cela avait été le cas quand la nouvelle école paléo-babylonienne avait besoin d'un certain niveau de virtuosité.

D'autres (rares) textes mathématiques remontent à l'époque séleucide (IIIe et IIe siècles av. J.-C.). Eux aussi viennent d'un milieu de scribes spécialisés dans la divination et l'exorcisme. Quoi qu'il en soit, pendant ce temps, une astronomie mathématique fondée sur des modèles numériques s'était développée, comme aide à la divination astrologique. C'est pourquoi une partie du milieu savant avait un besoin réel de savoir mathématique – non pas d'« algèbre » ni d'autres types de géométrie, mais d'élaboration de techniques liées au système sexagésimal. Pour les calculs astronomiques, la vieille liste de 32 paires d'inverses ne suffisait plus. La précision avec laquelle on connaissait le mouvement des planètes demandait un réseau beaucoup plus fin. De fait, une table séleucide énumère des paires d'inverses où un membre peut avoir jusqu'à 6 « chiffres » sexagésimaux, et l'autre encore plus. Mais parmi les trois textes séleucides qui comportent des problèmes mathématiques, un contient des problèmes géométriques utilitaires semblables à ceux de l'époque persane. L'un d'eux est à caractère thématique et traite de problèmes « algébriques » sur les rectangles, encore résolus avec la géométrie « naïve » mais avec des procédures non traditionnelles[9]. Enfin, beaucoup sont d'un type nouveau qui implique la diagonale (par exemple, les données sont la surface et la somme des côtés et de la diagonale). Le dernier texte est une anthologie qui contient ce dernier problème, mais également des problèmes du type $n + \bar{n} = \alpha$, où n et $\bar{n}$ sont des nombres inverses. Ils sont mathématiquement du type (3) et sont résolus avec la méthode traditionnelle. Ils représentent donc un héritage paléo-babylonien évident, qui doit avoir été transmis au sein d'un milieu utilisant la numération de position. Deux sommes « de un jusqu'à dix » sont tout à fait nouvelles, $\sum_{i=1}^{10} i^2 = \left(1 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot 55$, où 55 représente $\sum_{i=1}^{10} i$, et $\sum_{i=1}^{10} 2^{i-1} = 2^9 + (2^9 - 1)$. Tant la somme « de un jusqu'à dix » que les nouveaux problèmes sur les rectangles se retrouvent à la même époque dans les mathématiques démotiques égyptiennes, et plus tard dans les écrits néo-pythagoriciens ou de géométrie pratique gréco-latine. Comme les mathé-

9. Par exemple, les étapes utilisées pour résoudre un problème du type (4), c'est-à-dire

$$\square\,(u,v) = 2{,}0,\ u - v = 7,$$

correspondent à ces calculs symboliques :

$$(u+v)^2 = 4u \times v + (u-v)^2 = 8{,}49,$$

$$\text{donc } u+v = \sqrt{8{,}49} = 23, v = \frac{1}{2} \times (23-7) = 8, u = (u-v)+v = 7+8 = 15.$$

matiques particulières des scribes savants n'ont pas laissé de traces dans ces derniers milieux, les mathématiciens pratiques (arpenteurs et autres) auraient introduit des innovations, qui seraient encore une fois adoptées par les scribes[10].

6. *L'Egypte : un parallèle imparfait*

Au IVe millénaire, presque en même temps que les grandes cultures mésopotamiennes, la civilisation égyptienne adopte un système d'écriture, un peu avant l'unification du pays sous un seul pharaon. Peut-être que l'idée d'exprimer la langue de façon graphique a-t-elle été inspirée par les pratiques mésopotamiennes (à une époque où d'autres emprunts culturels indiquent l'existence de liens entre les deux civilisations), mais les principes des deux écritures diffèrent suffisamment pour monter que l'écriture est elle-même une construction indépendante. La même remarque vaut pour les mathématiques.

Deux éléments des mathématiques égyptiennes sont visibles dans une inscription et une représentation remontant à l'époque de l'unification : la numération et le « système canonique ».

La numération était en base dix, avec des symboles distincts pour 1, 10, ..., 1 000 000. Ils apparaissent dans une inscription qui raconte le nombre de prisonniers et de chèvres capturés lors d'une guerre (probablement celle d'unification) – la légitimité de l'Etat égyptien n'était pas fondée sur la « justice calculée » mais sur la conquête et, plus tard, sur la garantie d'ordre cosmique. Le « système canonique » fixe de manière détaillée les proportions numériques entre les parties du corps humain, et il prescrit la manière de dessiner la figure humaine à l'intérieur d'un réseau de carrés. C'est à ce système que nous devons l'aspect unique de l'art égyptien. Aux alentours de 3000, sous la première dynastie, la mesure du niveau de l'eau du Nil a également commencé – probablement dans le but de déterminer le niveau possible des taxes – ainsi qu'un rituel appelé « tendre la corde » au moment de fonder un temple, preuve irréfutable que l'architecture monumentale était basée sur

10. Nissen [1988] traite de l'histoire mésopotamienne des IVe et IIIe millénaires, Liverani [1988] va jusqu'à la conquête persane. Damerow et Englund [1987] présentent les métrologies d'Uruk, Nissen, Damerow et Englund [1993] les techniques de comptabilité jusqu'à Ur III. Sur les mathématiques du IIIe millénaire, voir Friberg [1986] ; Høyrup [1982] ; Foster et Robson [2003]. Les collections principales de textes paléo-babyloniens et séleucides sont Neugebauer [1935] ; Neugebauer et Sachs [1945[; Bruins et Rutten [1961]. Pour les textes tardifs mais pré-séleucides, voir Friberg, Hunger et al-Rawi [1990] ; Friberg [1997]. Robson [1999] aborde les mathématiques pratiques et le calcul numérique d'Ur III et de l'époque paléo-babylonienne, Høyrup [2002] l'algèbre paléo-babylonienne et suivante, ainsi que la tradition laïque et son héritage. En ce qui concerne l'abaque, voir Proust [2000].

des constructions géométriques. Sous la deuxième dynastie, au début du troisième millénaire, un calcul biennal « des richesses du pays » a démarré.

A part cela, nous ne savons pas grand-chose des mathématiques du IIIe millénaire, celui de l'Ancien Empire (environ 2650 – 2150). C'est le millénaire des grandes pyramides et autres œuvres grandioses réalisées avec une extraordinaire précision géométrique. Mais la pierre ne nous raconte rien de précis ni sur les techniques *mathématiques* impliquées, ni sur le savoir sous-jacent. Ce qui est certain, c'est que le système particulier des fractions [11] n'existait pas encore. En revanche, on utilisait (outre les « fractions naturelles » $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$) des subdivisions métrologiques. Nous savons également que l'administration faisait déjà usage d'une écriture cursive, l'écriture hiératique, qui devenait celle des mathématiques (certains symboles métrologiques n'ont qu'une forme hiératique, ou leur forme hiéroglyphique tardive).

C'est seulement au Moyen Empire (environ 2050 – 1650) que sont apparues ce que nous avons l'habitude de considérer comme les « mathématiques égyptiennes ». Cette création a coïncidé avec la naissance des écoles de scribes – les scribes du IIIe millénaire étaient formés en apprentissage. Deux grands papyrus nous présentent les mathématiques égyptiennes, les papyrus mathématiques « Rhind » et « de Moscou ». Celui de Moscou est, semble-t-il, une copie de devoir d'examen – il contient à plusieurs reprises le commentaire « tu as bien trouvé ». L'autre est une copie de ce qui pourrait être le manuel d'un enseignant. C'est donc grâce à l'existence de l'école que nous sommes aujourd'hui en possession de sources pour les mathématiques du IIe millénaire. Mais il est probable que le contexte scolaire a également déterminé un de leurs aspects essentiels, à savoir le système particulier des fractions.

Comme nous l'avons vu, on ne trouve dans les textes du IIIe millénaire, outre les « fractions naturelles », que des subdivisions métrologiques. Pour la pratique, c'est un excellent système, mais il ne permet pas au maître d'école de lever les ambiguïtés et de dire à l'élève « tu as bien trouvé ». Pour trouver et indiquer un résultat exact, il faut un système de notation des fractions quelconques.

A cet égard, l'école égyptienne a généralisé et érigé en système une notation dont la première trace remonte à la dernière partie de l'Ancien Empire : un chiffre surmonté d'un « ro » (ici, comme en hiératique, indiqué par un point), « part » (mais en langage arithmétique « partie aliquote », part de type $\frac{1}{n}$), en la combinant avec la règle selon laquelle un nombre fractionnaire ne peut pas

11. Fondamental au IIe millénaire, voir plus loin.

contenir deux fois la même partie aliquote. $\frac{2}{5}$ n'était donc pas $\dot{5}\dot{5} = (\frac{1}{5}+\frac{1}{5})$ mais $\dot{3}\,1\dot{5} = (\frac{1}{3}+\frac{1}{15})$ de 5. Seul $\frac{2}{3}$ (vieille fraction naturelle) avait son symbole particulier (transcrit dans la suite 3"). Non moins que « l'algèbre » des scribes babyloniens, l'usage complet de ce système permettait aux scribes égyptiens d'afficher leur virtuosité. Pour nous en rendre compte, nous devons considérer également d'autres techniques arithmétiques.

L'addition et la soustraction se faisaient directement sans difficulté. Pour multiplier, on doublait et décuplait. Par exemple, 53 × 75 pouvait se faire de cette façon :

/1	75
/2	150
/10	750
20	1 500
/40	3 000
Total	3 975.

L'idée est de vider un des facteurs et d'additionner les produits correspondants. 3 se décompose en 1 plus 2. A 1 correspond le produit 75, à 2 le produit 150. Il reste 50, dont un premier composant est 10 ; 10 fois 75 est évidemment 750 (c'était également évident pour les Egyptiens, qui avaient un système décimal, même s'il n'était pas positionnel). Le reste (40) s'obtient en doublant deux fois, ce qui vaut également pour le produit correspondant. A la fin, les produits marqués d'une / s'additionnent.

Dans la division, le dividende est vidé de la même façon. Par exemple, (3 975 divisé par 75) :

/1	75
/10	750
20	1 500
/40	3 000
/2	150
Total	3 975.

Cela semble simple, mais seulement jusqu'à l'introduction des fractions. Le produit $8\ 3''\ \dot{6}\ 1\dot{8} \times 8\ 3''\dot{6}\ 1\dot{8}$ $(8\ 3''\dot{6}\ 1\dot{8} = \frac{80}{9})$ se calcule ainsi :

1	8 3" $\dot{6}$ $\dot{18}$
2	17 3" $\dot{9}$
4	35 $\dot{2}$ $\dot{18}$
/8	71 $\dot{9}$
/3"	5 3" $\dot{6}$ $\dot{18}$ $\dot{27}$
$\dot{3}$	2 3" $\dot{6}$ $\dot{12}$ $\dot{36}$ $\dot{54}$
/$\dot{6}$	1 $\dot{3}$ $\dot{12}$ $\dot{24}$ $\dot{72}$ $\dot{108}$
/$\dot{18}$	$\dot{3}$ $\dot{9}$ $\dot{27}$ $\dot{108}$ $\dot{324}$
Total	79 $\dot{108}$ $\dot{324}$.

Il est facile de doubler $\dot{18}$ à partir de $\dot{9}$; il en est de même pour $\dot{6}$ et $\dot{3}$. Mais comment doubler $\dot{9}$? Pour cela, les calculateurs égyptiens avaient une tabulation de toutes les divisions $2/n$ où n est impair, $2 < n < 102$. Quoi qu'il en soit, un des principes pour la construction de cette table est dans le calcul de $2/9 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})/9 = \dot{6} + \dot{18}$ – c'est-à-dire que 2 se divise en deux parties aliquotes de 9. A la fin, toutes les fractions doivent être additionnées. A cet effet, il existe un nombre dont toutes les parties aliquotes peuvent être trouvées sans trop de difficultés – dans ce cas probablement 108 (ce n'est donc pas exactement un dénominateur commun). La somme de toutes les fractions de 108 sera $217 + \dot{3} = 2 \times 108 + 1 + \dot{3}$, et donc $2 + \dot{108} + \dot{324}$ de 108.

La division par des nombres qui contiennent des fractions est encore plus difficile. Un bel exemple (du « Rhind » n. 37) est 1 divisé par 3 $\dot{2}$ $\dot{18}$, avec comme résultat 1 4$\dot{3}\dot{2}$. Le calcul implique des fractions jusqu'à $\dot{576}$ et demande plus qu'un peu de fantaisie créative.

L'idée d'exprimer une grandeur en relation à une autre fait appel à une méthode très souvent utilisée, la « fausse simple position »[12]. Prenons comme exemple « Rhind » n. 24 : une grandeur, si on ajoute son $\dot{7}$, devient 19. Disons que la grandeur est 7, alors avec son $\dot{7}$ elle devient 8. Mais elle devrait être 19, donc $19/8 = 2\ \dot{2}\ \dot{8}$ fois plus grande. C'est donc $2\ \dot{2}\ \dot{8}$ multiplié par 7, c'est-à-dire $1 + 2 + 4$.

Les deux papyrus contiennent de nombreux problèmes d'arithmétique appliquée, et d'après l'organisation du « Rhind », il est évident que c'était délibéré, puisque d'abord était représentée l'arithmétique des nombres

12. Elle était également employée par les scribes babyloniens et dans toute l'arithmétique pratique jusqu'à la Renaissance.

abstraits, puis la géométrie et d'autres applications concrètes. Les problèmes appliqués portent sur la répartition de pains dans des proportions données, l'échange de pains ou de bière en fonction du contenu d'orge, la croissance d'un troupeau de vaches, etc. – tous problèmes qui correspondaient aux tâches des scribes tel qu'il en ressort des documents économiques. Beaucoup traitaient de problèmes métrologiques. Si l'on se fie aux documents économiques, on voit que les scribes appliquaient dans la vie courante le nouveau système des fractions, même si cela n'était pas très adapté aux calculs réels et même si cela donnait l'illusion d'une précision beaucoup plus grande que dans la réalité (le $\dot{180}$ d'un broc de bière !).

Les problèmes géométriques concernent l'inclinaison de pyramides, les surfaces de rectangles, de triangles rectangles et de cercles, une surface courbe qui pourrait être cylindrique ou semi-sphérique, ainsi que les volumes de prismes rectangulaires et d'un tronc de pyramide (correct). Les formules pour les surfaces de triangles et de rectangles et pour les volumes de prismes coïncidaient par nécessité à celles des Babyloniens, mais les habitudes métrologiques ont fait qu'elles s'en distinguaient dans les détails. La surface du cercle est définie de manière complètement différente de celle des Babyloniens, c'est-à-dire comme la surface d'un carré dont le côté est $\frac{8}{9}$ du diamètre du cercle (donc littéralement comme « quadrature du cercle »).

Dans l'ensemble, les mathématiques des écoles de scribes égyptiens ressemblaient beaucoup à celles des écoles paléo-babyloniennes. C'était principalement du calcul avec des nombres abstraits, quelque chose d'essentiel puisque la tâche du scribe qui pratiquait les mathématiques était toujours celle de trouver le nombre juste. En outre, cela se situait à un niveau utilitaire, conforme aux tâches professionnelles des scribes. Cela dépendait enfin de la dynamique de l'institution scolaire, capable d'offrir, à Babylone, un niveau sur-utilitaire, et en Egypte, celui du calcul plus élaboré que nécessaire.

A partir du Nouvel Empire (environ 1550 –1070) et de la première moitié du Ier millénaire, nous n'avons pas de grands documents mathématiques, mais les documents économiques suggèrent que les techniques mathématiques sont restées les mêmes. Il faut attendre l'époque démotique (la seconde moitié du Ier millénaire), plus précisément l'époque ptolémaïque et romaine, pour disposer de nouveaux papyrus mathématiques.

Fondamentalement, il n'y a pas de grands changements, mais le tout donne l'impression de règles canoniques moins rigides ou moins respectées (un peu comme l'impression que donne l'art visuel de la tradition égyptienne de la même époque). De nouveaux types de problèmes (nous en avons parlé) et de nouvelles formules apparaissent également, souvent moins précises que celles de l'époque pharaonique et, en apparence, influencées par les mathématiques mésopotamiennes – par exemple, la surface du cercle équivaut à $3/4$ de la surface du carré circonscrit, et le volume d'un tronc de cône se calcule comme dans les textes paléo-babyloniens. Aussi, ne serons-nous pas surpris de voir, pendant cette période, que c'étaient les administrateurs assyriens et persans (avec leurs scribes) qui donnaient les ordres[13].

7. *Héritage*

Les mathématiques babyloniennes et égyptiennes sont mortes, comme le sont les cultures dont elles faisaient partie. Pour autant, ont-elles disparu sans laisser de traces vivantes ?

Certainement pas. Tout d'abord, nous connaissons la division sexagésimale du temps et du degré. Système sans doute rudimentaire, mais qui a inspiré, au Moyen Age l'usage des fractions décimales, c'est-à-dire le système complet de position. Il est également possible que le système décimal de position des Indiens soit d'inspiration mésopotamienne (ils l'ont inventé quand ils connaissaient déjà l'astronomie babylonienne), mais c'est peu probable.

Les Grecs pendant la période hellénistique ont adopté les fractions sexagésimales à usage astronomique. Bien avant, ils avaient déjà repris l'usage égyptien des parties aliquotes, mais sans trop respecter le canon qui réglait ce système aux temps des pharaons. Ils prétendaient également avoir appris la géométrie des Egyptiens – Hérodote en particulier, la tiendrait des « tendeurs de corde ». Par certains côtés, c'est peut-être vrai. Les racines de la géométrie grecque étaient probablement multiples, et l'art archaïque s'est appuyé sur le système canonique égyptien. Toutefois, les aspects de la géométrie que les auteurs grecs attribuent à Pythagore (son « théorème », l'application des surfaces par excès et par défaut, c'est-à-dire les *Eléments* II.5-6) se retrouvent dans les mathématiques non pas pharaoniques mais plutôt babyloniennes. De fait, quand « l'algèbre » babylonienne a été découverte et interprétée en clé numérique, Neugebauer était convaincu que la soit-disant « algèbre géométrique » des *Eléments* II avait été une traduction géométrique du savoir numérique des Babyloniens. Ce point de vue a été contesté à un certain moment par des auteurs qui savaient peu de choses sur les mathématiques babyloniennes, mais leurs objections n'ont aucune valeur face à l'interprétation géométrique. De toute façon, il n'existe pas de ligne directe qui va des scribes paléo-babyloniens à la géométrie grecque. Comme nous l'avons vu, la tradition paléo-babylonienne précoce s'est interrompue quand les écoles ont disparu.

13. Les textes mathématiques égyptiens sont traduits dans Clagett [1999], qui contient également des reproductions des éditions et des transcriptions originales, ainsi qu'une présentation globale. Iversen [1975] traite du « système canonique ».

Ce que les Grecs ont rencontré, c'est la tradition séculière (et il n'est pas exclu qu'ils l'aient rencontrée en Egypte après l'arrivée des administrateurs assyriens et persans). De fait, tout ce qui, dans Euclide (et Diophante), est d'inspiration mésopotamienne appartenait à la tradition laïque, et rien de ce qui, dans les mathématiques scolaires, va au-delà des arpenteurs ne se retrouve dans les mathématiques grecques.

Comme il a été mentionné plus haut, les innovations dans la tradition que nous relevons dans les textes séleucides et démotiques se reflètent dans les textes gréco-latins néo-pythagoriciens et de géométrie pratique, sans pour autant avoir une grande importance pour l'histoire. En revanche, l'influence sur l'algèbre de al-Khwārizmī est très importante. Rien ne permet de penser cependant que l'algèbre traditionnelle, décrite par al-Khwārizmī à la demande du calife al-Ma'mūn, se soit directement inspirée de l'algèbre babylonienne ou des arpenteurs. Mais al-Khwārizmī, de la nécessité de démonstrations rigoureuses a voulu fournir des preuves que les règles numériques énoncées étaient valides. A cet effet, il a employé les techniques de la tradition des arpenteurs, encore vivante à son époque. Une fois l'algèbre d'al-Khwārizmī traduite en latin, ces preuves ont constitué, semble-t-il, le noyau même de la discipline. Les démonstrations de Cardan pour les solutions de l'équation du troisième degré s'en sont inspirées, elles aussi. En outre, elles faisaient directement appel aux solutions des problèmes (3) et (4) sur les rectangles, que Cardan connaissait bien par le biais de la tradition abaciste.

Traduit de l'italien par Phan Ngoc Dung

Références bibliographiques

ASCHER, M.
1991 *Ethnomathematics*, Brooks/Cole Publishing, Pacific Grove ; éd. fr. *Mathématiques d'ailleurs.* Le Seuil, Paris, 1998.

BRUINS, E. M. et RUTTEN, M.
1961 *Textes mathématiques de Suse*, Paul Geuthner, Paris.

CLAGETT, M.
1999 *Ancient Egyptian Science. A Source Book*, vol. III, *Ancient Egyptian Mathematics*, American Philosophical Society, Philadelphia.

DAMEROW, P. et ENGLUND, R. K.
1987 « Die Zahlzeichensysteme der Archaischen Texte aus Uruk », in M. W. GREEN et H. J. NISSEN, *Zeichenliste der Archaischen Texte aus Uruk*, vol. II, Gebr. Mann, Berlin, p. 117-166.

FOSTER, B. et ROBSON, E.
2004 « A new look at the Sargonic mathematical corpus », in *Zeitschrift für Assyriologie und Vorderasiatische Archäologie*, 94, p. 1-15.

FRIBERG, J.
1986 « The early roots of Babylonian mathematics. III : Three remarkable texts from ancient Ebla », in *Vicino Oriente*, 6, p. 3-25.
1997 « Seed and reeds continued. Another metro-mathematical topic text from late Babylonian Uruk », in *Baghdader Mitteilungen*, 28, p. 251-265, pl. 45-46.

FRIBERG, J., HUNGER, H. et AL-RAWI, F.
1990 « Seeds and reeds. A metro-mathematical topic text from late Babylonian Uruk », in *Baghdader Mitteilungen*, 21, p. 483-557, pl. 46-48.

HØYRUP, J.
1982 « Investigations of an early Sumerian division problem, c. 2500 B.C. », in *Historia Mathematica*, 9, p. 19-36.
2002 *Lengths, Widths, Surfaces : A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*, Springer, New York.

IVERSEN, E.
1975 *Canon and Proportion in Egyptian Art*, 2e éd. revue et corrigée, Aris & Phillips, Warminster.

LIVERANI, M.
1988 *Antico Oriente. Storia, società, economia*, Laterza, Rome-Bari.

NEUGEBAUER, O.
1935 *Mathematische Keilschrift-Texte*, 3 vol., Julius Springer, Berlin 1935-1937, vol. I.

NEUGEBAUER, O. et SACHS, A.
1945 *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society, New Haven.

NISSEN, H. J.
1988 *The Early History of the Ancient Near East*, University of Chicago Press, Chicago-Londres.

NISSEN, H. J., DAMEROW, P. et ENGLUND, R. K.
1993 *Archaic Bookkeeping : Writing and Techniques of Economic Administration in the Ancient Near East*, University of Chicago Press, Chicago.

PROUST, CH.
2000 « La multiplication babylonienne : la part non écrite du calcul », in *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 6, p. 293-303.

ROBSON, E.
1999 *Mesopotamian Mathematics 2100-1600 BC. Technical Constants in Bureaucracy and Education*, Clarendon Press, Oxford.

SCHMANDT-BESSERAT, D.
1992 *Before Writing*, 2 vol., University of Texas Press, Austin.

SERAFINA CUOMO

Les mathématiques classiques et hellénistiques